2019-2020 ÖĞRETİM YILI FEN-EDB. FAK. MATEMATİK BÖLÜMÜ MAT102 ANALİZ II FİNAL SINAVI SORULARININ ÇÖZÜMLERİ

① $x \neq y$ için $f(x) = \tan x$ fonksiyonuna Lagrange teoremi uygulanırsa $\exists c \in (x,y)$:

$$\frac{\tan x - \tan y}{x-y} = \sec^2 c \Rightarrow \left|\frac{\tan x - \tan y}{x-y}\right| = \sec^2 c \geq 1$$

$\Rightarrow |\tan x - \tan y| \geq |x-y|$ ...(1) bulunur.

(1) eşitsizliği y yerine $-y$ yazıldığında da doğrudur.

$$\tan(-y) = \frac{\sin(-y)}{\cos(-y)} = -\frac{\sin y}{\cos y} = -\tan y \text{ olup,}$$

(1) de y yerine $(-y)$ yazılırsa

$|\tan x + \tan y| \geq |x+y|$ bulunur.

② $$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\cdot\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x$$

$f(x) = \sqrt{x}$, $t_k = \frac{k}{n}$, $\Delta x = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} \text{ dır.}$$

③ $x \geq -1$ olmak üzere $2y^2 = 5(x+1)$ eğrisi üzerindeki nokta (x,y) olsun. Bu noktanın orjine olan uzaklığı, $d = \sqrt{x^2+y^2}$ dır. $y^2 = \frac{5}{2}(x+1)$ old.,

$d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{5}{2}(x+1)}$ olur. $d(x)$ fonksiyonunun en küçük değeri sorulmaktadır. Bunun için

$f(x) = x^2 + \frac{5}{2}(x+1)$, $x \geq -1$

fonksiyonunun en küçük değerini bulmak yeterli, çünkü f yi en küçük yapan değer d yi de en küçük yapar.

$$f'(x) = 2x + \frac{5}{2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{4} \text{ olur.}$$

$x \geq -1$ için $x = -\frac{5}{4}$ kritik nokta değildir. $\left(-\frac{5}{4} < -1 \text{ olr.}\right)$

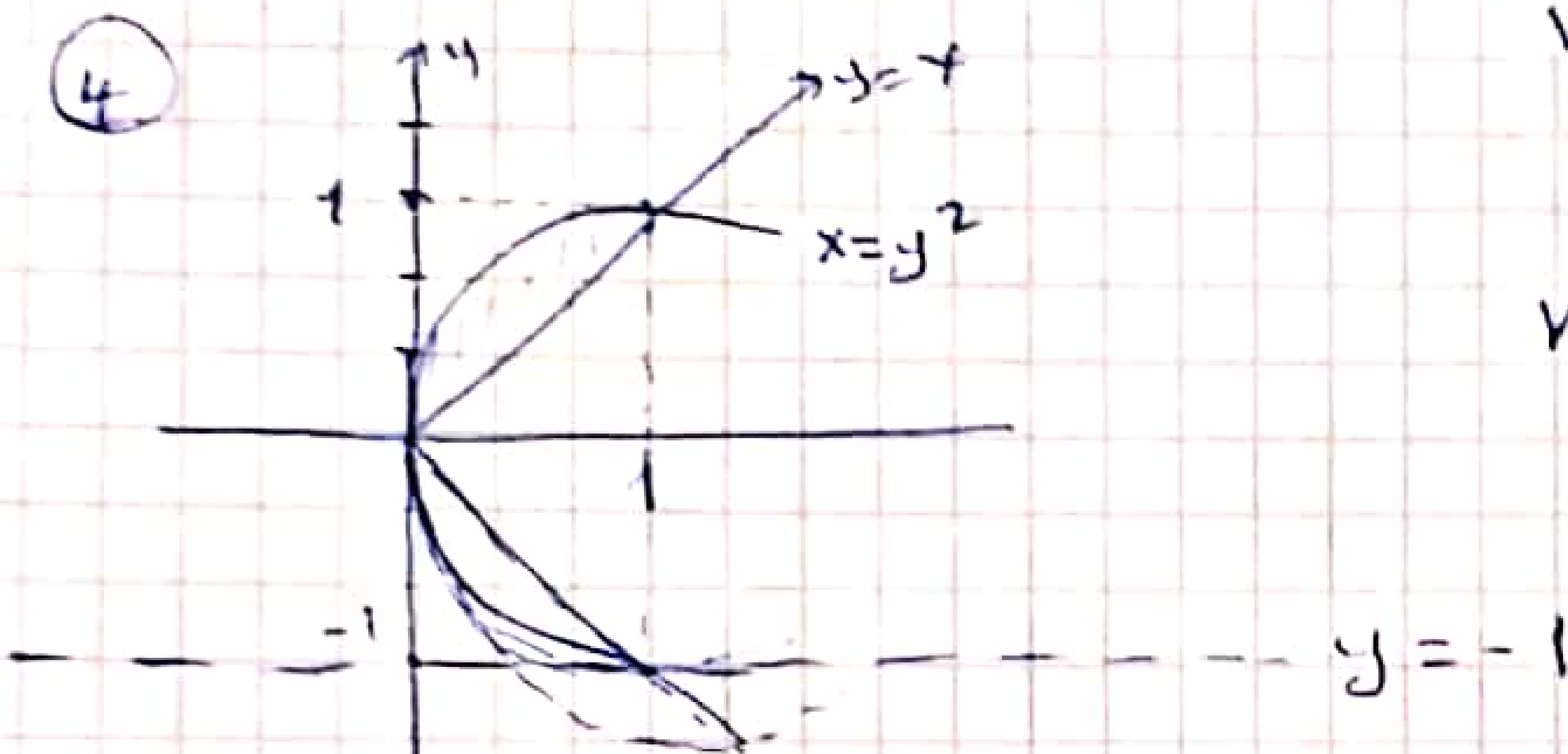
$x = -1$ için $f(x) = f(-1) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

olduğundan sadece $x = -1$ kritik noktadır.

O zaman orjine en yakın nokta $x = -1$, $y = 0$

$(-1, 0)$ dır.

4



$$V = \pi \cdot \int_0^1 \left[(\sqrt{x}+1)^2 - (x+1)^2 \right] dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (2\sqrt{x} - x - x^2)\, dx$$

$$\boxed{V = \frac{\pi}{2} \text{ br}^3}$$

5 $F(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t^2+3}\, dt \Rightarrow F'(x) = \frac{\cos x}{x^2+3}$

$$F''(x) = \frac{-(x^2+3)\cdot \sin x - 2x \cos x}{(x^2+3)^2}$$

$F(0) = 0$, $F'(0) = \frac{1}{3}$, $F''(0) = 0$

CamScanner ile tarandı

⑥ $I=\int_0^{\pi}\frac{x.\sin x}{\sqrt{3+\sin^2 x}}dx$ için $x=\pi-t$ değ. değişimi yapılırsa $dx=-dt$ olup

sınırlar $x=\pi$ iken $t=0$

$x=0$ iken $t=\pi$ olup

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\cdot\sin x}{\sqrt{3+\sin^2 x}}dx=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\cdot\sin(\pi-t)}{\sqrt{3+\sin^2(\pi-t)}}\cdot -dt$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\pi.\sin t}{\sqrt{3+\sin^2 t}}dt-\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{t.\sin t}{\sqrt{3+\sin^2 t}}dt}_{I} \Rightarrow$$

$2I=\int_0^{\pi}\frac{\pi\cdot\sin t}{\sqrt{3+\sin^2 t}}dt$ olur. $R(-\sin,\cos)=-R(\sin,\cos)$ old. dan $\cos t=u$ alınırsa $-\sin t.dt=du$ ile

$$I=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-du}{\sqrt{4-u^2}}=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{4-u^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}}du=\frac{\pi}{2}\left(\arcsin\frac{u}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

(7) $J=\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx = ?$

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{x^4+2x^2+1-2x^2}=\frac{1}{(x^2+1)^2-2x^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)+x\sqrt{2}}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)-x\sqrt{2}}$$

ile basit kesirlere ayırma yöntemiyle

$A=1/2\sqrt{2}$, $B=1/2$, $C=-1/2\sqrt{2}$ $D=1/2$ olup

$$J=\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|\Bigg|_{x=0}^{1}+\int_0^1\left(\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx\right]$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2+\sqrt{2}x}+\frac{1}{1+x^2-\sqrt{2}x}\right)dx$$

$$=\frac{4}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1\left(\frac{\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}x+2x^2}+\frac{\sqrt{2}}{2+2x^2-2\sqrt{2}x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}+1)+\arctan(\sqrt{2}-1)-\frac{\pi}{2}\right)$$

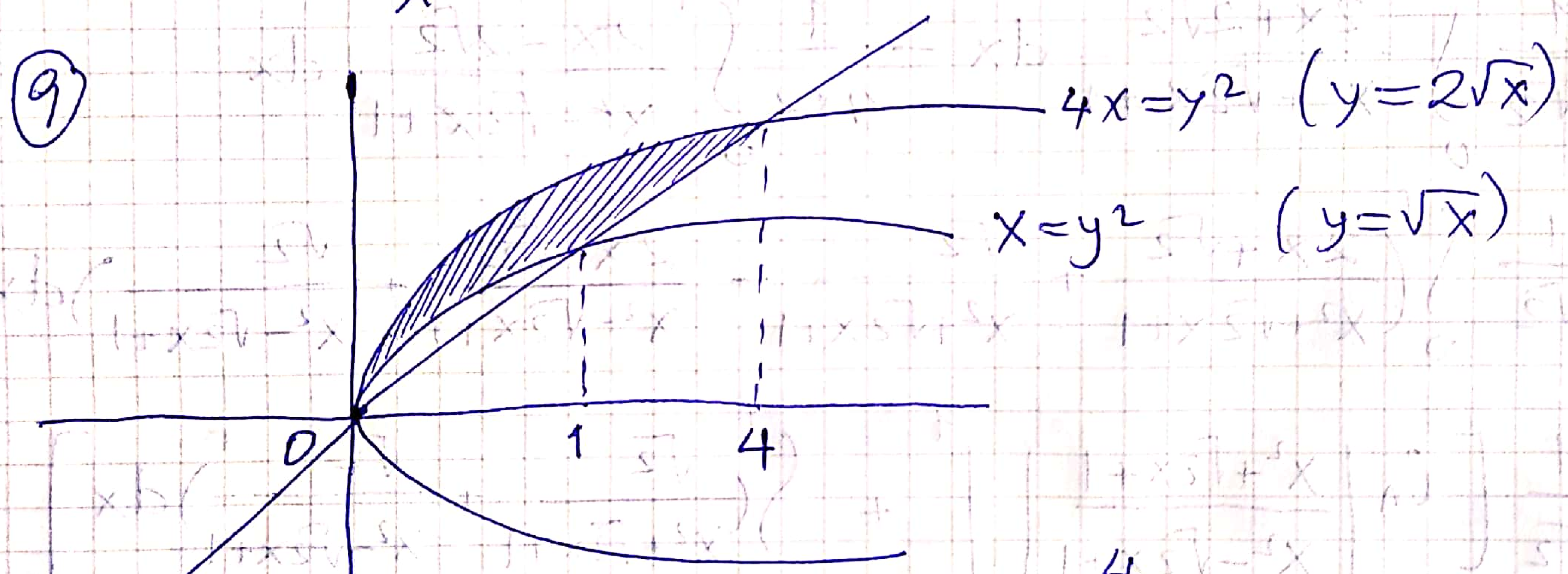
(8) $e^{\frac{x}{y}} \cdot \sin\frac{x}{y} + e^{y/x} \cdot \cos\frac{y}{x} = 0$ için kapalı fonk. türevi alınırsa

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^{x/y}\cdot\frac{1}{y}\cdot\sin\frac{x}{y} + e^{x/y}\cdot\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y} + e^{y/x}\cdot\frac{-y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + e^{y/x}\cdot\frac{\sin y/x}{x^2}}{e^{x/y}\cdot\frac{-x}{y^2}\cdot\sin\frac{x}{y} + e^{x/y}\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{-x}{y^2} + e^{y/x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{y}{x} - \frac{e^{y/x}}{x}\cdot\sin\frac{y}{x}}$$

$$= \frac{y}{x}$$

$$y'' = \frac{y'\cdot x - y\cdot 1}{x^2} = 0 \text{ olur.}$$

(9)



$$S = \int_0^1 (2\sqrt{x} - \sqrt{x})dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - x)dx$$

$$S = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 + \left(\frac{2x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4$$

$$= 2/3 + \left[\left(\frac{4}{3}8 - 8\right) - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{15}{6} \text{ br}^2$$

CamScanner ile tarandı

10) $f(x) = e^{x^2/x-1}$ için

1°) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\} = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

2°) $f(-x) = e^{x^2/-x-1}$ olup $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$ dir. Yani ne tek nede çifttir.

3°) $A(0,1)$ noktasından geçer.

4°) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = e^{-\infty} = 0$
} $x=1$ düşey (sağdan) asimtot

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ olup $y=0$ doğrusu $-\infty$ kolda yatay asimtot

5°) $f'(x) = e^{x^2/x-1} \cdot \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ olup

x		0		1		2	
f'	+	0	−	‖	−	0	+
f	↗		↘ 0	‖	$+\infty$ ↘	e^4	↗